Całka podwójna - wybrane zastosowania fizyczne

Niech obszar płaski D będzie płytką materialną o gęstości powierzchniowej $\rho(x,y)$. Możemy wówczas zapisać następujące wzory:

Masa obszaru D:

(10) $$m = \iint_D \rho(x,y)dxdy\,.$$

Momenty statyczne obszaru D:

- *względem osi* Ox:

(11) $$M_x = \iint_D y\rho(x,y)dxdy\,.$$

- *względem osi* Oy:

(12) $$M_y = \iint_D x\rho(x,y)dxdy\,.$$

Współrzędne środka ciężkości C *obszaru* D:

(13) $$x_C = \frac{M_y}{m},\quad y_C = \frac{M_x}{m}\,.$$

Momenty bezwładności obszaru D:

- *względem osi* Ox:

(14) $$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)dxdy\,.$$

- *względem osi* Oy:

(15) $$I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)dxdy\,.$$

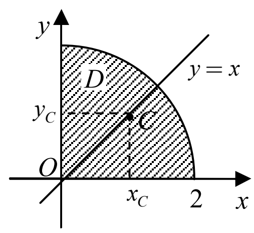
- *względem początku układu współrzędnych*:

(16) $$I_O = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy\,.$$

Przykład. Wyznaczyć współrzędne środka ciężkości ćwiartki koła o promieniu $R=2$ i gęstości $\rho(x,y)=1$.

Rozwiązanie. Umieśćmy nasz obszar D w układzie współrzędnych tak, jak na rysunku 23. Ponieważ obszar ten ma stałą gęstość powierzchniową (jest jednorodny) i jest symetryczny względem prostej $y=x$, więc obie współrzędne środka ciężkości będą równe ($y_C = x_C$). Współrzędną x_C wyznaczymy ze wzoru:

$$x_C = \frac{M_y}{m}\,.$$



Rys. 23

Wymagane całki obliczymy wprowadzając współrzędne biegunowe. Zauważmy, że współrzędne biegunowe dowolnego punktu obszaru D spełniają następujące nierówności:

$$D' = \left\{(r,\varphi):\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 2\right\}.$$

Obliczamy:

$$m=\iint_D \rho(x,y)dxdy=\iint_D dxdy=\iint_{D'} r\,drd\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^2 rdr\right)d\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^2 d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=2[\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi\,,$$

$$M_y=\iint_D x\rho(x,y)dxdy=\iint_D x\,dxdy=\iint_{D'} r\cos\varphi\cdot r\,drd\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^2 r^2\cos\varphi\,dr\right)d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{3}r^3\cos\varphi\right]_0^2 d\varphi=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{8}{3}[\sin\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{3}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=\frac{8}{3}.$$

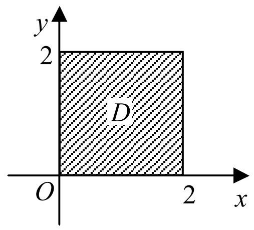
Zatem

$$x_C=\frac{M_y}{m}=\frac{\frac{8}{3}}{\pi}=\frac{8}{3\pi}.$$

Ostatecznie środek ciężkości C obszaru D ma współrzędne: $\left(\frac{8}{3\pi},\frac{8}{3\pi}\right)$.

Przykład. Znaleźć moment bezwładności kwadratu D o boku równym 2 i gęstości $\rho(x,y)=3y$ względem jednego z wierzchołków.

Rozwiązanie. Umieśćmy nasz kwadrat w układzie współrzędnych tak, aby jeden z wierzchołków znalazł się w początku układu współrzędnych, a dwa boki leżały na osiach układu (rys. 24).



Rys. 24

Wówczas obszar D można zapisać w postaci:

$$D=\{(x,y):0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\}$$

Szukany moment bezwładności obszaru D obliczamy ze wzoru (16):

$$I_O=\iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy=\iint_D (x^2+y^2)3ydxdy=$$

$$=3\iint_D (x^2y+y^3)dxdy=3\int_0^2\left[\int_0^2 (x^2y+y^3)dy\right]dx=3\int_0^2\left[\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{4}y^4\right]_0^2 dx=$$

$$=3\int_0^2\left(2x^2+4\right)dx=3\left[\frac{2}{3}x^3+4x\right]_0^2=3\left(\frac{16}{3}+8\right)=16+24=40$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

34. Obliczyć masę obszaru płaskiego D o gęstości $\rho(x,y)=x+y$, ograniczonego krzywymi: $y=x^2,\ x=y^2$.

35. Znaleźć współrzędne środka ciężkości płyty o gęstości $\rho(x,y)=1$ ograniczonej krzywymi: $y=x^2,\ x+y=2$.

36. Wyznaczyć moment bezwładności ćwiartki koła o promieniu $R = 2$ i gęstości $\rho(x, y) = 1$ względem środka koła.

37. Wyznaczyć moment bezwładności względem osi Ox trójkąta o wierzchołkach: $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ i gęstości powierzchniowej $\rho(x, y) = 2x$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch